Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Ján Labant

Laplaceova a inverzní Laplaceova transformace

Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Karel Najzar, CSc.
Studijní program: obecná matematika

2009

Na tomto mieste sa chcem poďakovať predovšetkým svojmu vedúcemu práce, pánovi docentovi Karlovi Najzarovi, za zapožičanie literatúry a za jeho vedenie, cenné rady, a pripomienky, ktoré mi veľmi pomohli pri vypracovaní bakalárskej práce.
Ďakujem aj svojej rodine, ktorá mi pri štúdiu poskytla toľko potrebné zázemie, ako aj priateľom a známym za prejavenú podporu.

Prehlasujem, že som svoju bakalársku prácu napísal samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov. Súhlasím so zapožičiavaním práce a jej zverejňovaním.

V Prahe dňa 10. decembra 2009 Ján Labant

Obsah

Názov práce: Laplaceova a inverzní Laplaceova transformace
Autor: Ján Labant
Katedra: Katedra numerické matematiky
Vedúci bakalárskej práce: doc. RNDr. Karel Najzar, CSc.
e-mail vedúceho: knaj@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V predloženej práci sa oboznámime s Laplaceovou transformáciou. Študujeme množstvo jej vlastností a ukážeme si problém, ktorý je sa skrýva v úlohe nájdenia inverznej Laplaceovej transformácie. V práci si tak predstavíme niektoré numerické metódy riešenia tohto problému.

Kľúčové slová: Laplaceova transformácia, inverzná Laplaceova transformácia

Title: The Laplace and inversion of Laplace transform.
Author: Ján Labant
Department: Department of Numerical Mathematics
Supervisor: doc. RNDr. Karel Najzar, CSc.
Supervisor's e-mail address: knaj@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study the Laplace transform. We study much of its properties and we look at the challenge related to the finding inversion of the Laplace transform problem. In the present work we introduce some of numerical methods for solving this problem.

Keywords: Laplace transform, inversion of Laplace transform

Úvod

Laplaceova transformácia je príklad integrálnej transformácie. Je silným a často používaným nástrojom pri riešení diferenciálnych rovníc. V práci sa oboznámime s množstvom vlastností Laplaceovej transformácie a v závere práce riešime úlohu nájdenia inverznej Laplaceovej transformácie, čo je tzv. *ill-posed* úloha.

V kapitole 2 skúmame existenciu Laplaceovej transformácie, pričom si namiesto priestoru exponenciálne ohraničených lokálne integrovateľných funkcií v práci vystačíme s exponenciálne ohraničenými spojitými funkciami.

V kapitole 3 si predvedieme dôležité vlastnosti Laplaceovej transformácie. Vety a dôkazy v tejto kapitole sú z väčšej časti prevzaté z knihy [6].

Kapitolou 4 sa už začíname zaoberať inverznou Laplaceovou transformáciou. S jej definíciou je spätý problém, ktorý si ukážeme. V závere kapitoly odvodíme dôležitý vzťah, vďaka ktorému vieme určiť inverznú Laplaceovu transformáciu ľubovoľného parciálneho zlomku.

V poslednej kapitole ukážeme niektoré numerické metódy hľadania inverznej Laplaceovej transformácie. Pozrieme sa tak na výsledky niektorých známych matematikov, ktorí túto úlohu riešili, či už pomocou ortogonálnych polynómov, alebo s využitím Fourierovej transformácie. Ukážeme aj numerické testy metód. V závere kapitoly stručne spomenieme ďalšie numerické metódy.

Pri práci boli využité poznámky z prednášok Matematickej analýzy doc. RNDr. Jiřího Veselého, CSc. a Komplexnej analýzy doc. RNDr. Ondřeja Kalendu, Ph.D. a text [5]. Ďalej boli využité stránky [4] a [8]. Vzhľadom k všeobecnej známosti väčšiny vzorcov nie sú zdroje v ďalšom texte explicitne citované. Vzhľadom k zameraniu práce na numerické riešenie inverznej Laplaceovej transformácie sú niektoré dôkazy riešené odkazom na literatúru.

Pripomeňme ešte jeden historický fakt o Laplaceovej transformácii. Jej pôvod totiž siaha až do čias Napoleona Bonaparte. S týmto diktátorom spolupracoval aj samotný Pierre-Simon Laplace (23.marec 1749 – 5.marec 1827), francúzsky astronóm a matematik. Je preto obdivuhodné, aké využitie nachádza Laplaceova transformácia aj v dnešnej dobe.

Kapitola 1

Použité definície a značenia

V tejto kapitole uvedieme definície základných pojmov a značení, ktoré ďalej využijeme pri bližšom skúmaní Laplaceovej transformácie. Začnime obvyklou definíciou nevlastného Riemannovho integrálu.

Definícia 1.1. *Nevlastný Riemannov integrál.*
Nech $a \in \mathbb{R}$ a $b \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $a < b$ a nech pre každé $t \in (a, b)$ existuje Riemannov integrál $\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$. Ďalej nech buď platí $b = \infty$ alebo $f(x)$ nie je ohraničená v okolí bodu b. Ak existuje vlastná $\lim_{t\to b-} \int_a^t f(x)\mathrm{d}x$, nazveme ju nevlastným Riemannovým integrálom funkcie $f(x)$ a tvrdíme, že tento integrál je konvergentný. V prípade, že je limita nevlastná, alebo neexistuje, tvrdíme, že integrál diverguje. Nevlastný Riemannov integrál funkcie $f(x)$ od a do b značíme $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Platí teda

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to b-} \int_a^t f(x)\mathrm{d}x.$$

Predošlú definíciu potrebujeme na definovanie Laplaceovej transformácie.

Definícia 1.2. *Laplaceova transformácia.*
Nech $f(t)$ je funkcia reálnej premennej $t \geq 0$. Laplaceovou transformáciou tejto funkcie rozumieme funkciu $F(s)$ komplexnej (reálnej) premennej s, definovanú vzťahom

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t))(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{d}t,$$

kde nevlastný Riemannov integrál existuje (t.j. existuje vlastná limita a nadobúda konečnú hodnotu), teda

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau e^{-st} f(t)\mathrm{d}t.$$

Symbol $\mathcal{L}$ nazvime Laplaceov operátor.

Správne by sme mali písať $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$. Pre zjednodušenie zápisu budeme v ďalšom texte uvádzať $\mathcal{L}(f(t))$, resp. $\mathcal{L}(f)$.
Podmienkami existencie Laplaceovej transformácie sa budeme bližšie zaoberať v Kapitole 2, pričom sa v práci obmedzíme na funkcie spojité na intervale $[0, \infty)$, teda priestore označovaného $C[0, \infty)$. Z toho dôvodu sme si v predošlej definícii vystačíli s nevlastným Riemannovým integrálom. Laplaceova transformácia ale existuje aj za podmienok, kedy Riemannov integrál nemá zmysel uvažovať, ako napríklad pre niektoré prípady lokálne integrovateľných funkcií. V tom prípade by sme v predošlej definícii uvažovali Lebesgueov integrál.

Poznámka 1.3. *Pri dôkazoch niektorých vlatností Laplaceovej transformácie nám nebudú postačovať vlastnosti nevlastného Riemannovho integrálu. Vtedy budeme uvažovať Lebesgueov integrál s príslušnými vlastnosťami.*

Ďašie definície budú potrebné predovšetkým pri skúmaní vlastností Laplaceovej transformácie v nasledujúcich kapitolách.

Definícia 1.4. *Exponenciálne ohraničená funkcia.*
Hovoríme, že funkcia f je exponenciálne ohraničená, ak existujú také kladné konštanty M a α, že pre každé $t \geq 0$ platí

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}.$$

Definícia 1.5. *Skoková funkcia.*
Skoková funkcia $u_a(t)$ je definovaná nasledovne

$$u_a(t) = 0, \quad t < a$$

$$u_a(t) = 1, \quad t \geq a.$$

Definícia 1.6. *Konvolúcia.*
Nech $f(t), g(t)$ sú spojité funkcie definované pre $t > 0$. Konvolúcia $(f * g)$ je definovaná vzťahom

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)\mathrm{d}\tau.$$

Kapitola 2

Existencia Laplaceovej transformácie

Laplaceov operátor nemôžeme aplikovať na všetky funkcie, pretože podmienkou existencie Laplaceovej transformácie je konvergencia integrálu. Uveďme preto vetu, ktorá zaručuje existenciu Laplaceovej transformácie a jej absolútnu a, ako ukážeme, aj rovnomernú konvergenciu.

Veta 2.1. *Nech je funkcia f spojitá na intervale $[0, \infty)$ a nech je exponenciálne ohraničená (teda $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$, kde $t \geq 0$). Potom Laplaceova transformácia funkcie f, teda $\mathcal{L}(f)$, existuje pre $Re(s) > \alpha$ (a integrál konverguje absolútne).*

Dôkaz. Vieme, že $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ pre všetky $t \geq 0$.
Pre $s = x + iy$ a $\tau > 0$ platí

$$\int_0^\tau |e^{-st} f(t)| \mathrm{d}t \leq M \int_0^\tau e^{-(x-\alpha)t} \mathrm{d}t = \frac{M}{x-\alpha} - \frac{Me^{-(x-\alpha)\tau}}{x-\alpha}.$$

Vieme, že $x = Re(s) > \alpha$. Prevedením limity pre $\tau \to \infty$ preto dostávame výsledok:

$$\int_0^\infty |e^{-st} f(t)| \mathrm{d}t \leq \frac{M}{x-\alpha}.$$

Teda $\mathcal{L}(f)$ konverguje absolútne. □

V úvode kapitoly sme naznačili aj rovnomernú konvergenciu, pozrime sa preto, či sú uvedené podmienky postačujúce aj pre rovnomernú konvergegenciu.

Poznámka 2.2. *Integrál z predošlej vety konverguje rovnomerne na množine $\{\beta; Re(\beta) > \alpha + \epsilon\}$, kde $\epsilon > 0$.*

Dôkaz. Vieme, že $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ pre $t \geq 0$. Nech je $x = Re(s) > \alpha$ a zvoľme $t_0 \geq 0$. Potom

$$\left| \int_{t_0}^{\infty} e^{-st} f(t) \right| \leq \int_{t_0}^{\infty} e^{-xt} |f(t)| \mathrm{d}t \leq M \int_{t_0}^{\infty} e^{-(x-\alpha)t} \mathrm{d}t = \left[-\frac{Me^{-(x-\alpha)t}}{x-\alpha} \right]_{t_0}^{\infty} =$$

$$= \frac{Me^{-(x-\alpha)t_0}}{x-\alpha}$$

Zvoľme $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ ľubovoľné a vezmime $x_0 = \alpha + \epsilon$. Potom pre všetky $x \geq x_0$ platí

$$\frac{Me^{-(x-\alpha)t_0}}{x-\alpha} \leq \frac{M}{x_0-\alpha} e^{-(x_0-\alpha)t_0} = \frac{M}{\epsilon} e^{-\epsilon t_0}.$$

Voľbou t_0 môžme výraz na pravej strane ľubovoľne zmenšiť. Existuje preto $T > 0$ také, že pre $t_0 \geq T$ bude tento výraz menší ako δ. Teda pre $t_0 \geq T$ bude

$$\left| \int_{t_0}^{\infty} e^{-st} f(t) \right| < \delta \quad \forall s, Re(s) \geq x_0.$$

□

Pre úplnosť uveďme príklad, kedy funkcia nespĺňa predpoklady predošlej vety, avšak Laplaceova transformácia existuje.

Príklad 2.3. *Nech $f(t) = 2te^{t^2} \cos e^{t^2}$.*
Funkcia f je spojitá na $[0, \infty)$, ale nie je exponenciálne ohraničená, pretože $f(t)/e^{\alpha t} \to \infty$ pre ľubovoľné α.
Pre každé s, kde $Re(s) > 0$ môžme počítať per partes

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} 2te^{t^2} \cos e^{t^2} \mathrm{d}t =$$

$$= [e^{-st} \sin e^{t^2}]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} \sin e^{t^2} \mathrm{d}t = -\sin 1 + s\mathcal{L}(\sin e^{t^2}).$$

Funkcia $\sin e^{t^2}$ je exponenciálne ohraničená, a teda podľa predošlej vety $\mathcal{L}(\sin e^{t^2})$ existuje.

Kapitola 3

Vlastnosti Laplaceovej transformácie

V tejto kapitole sa oboznámime s vlastnosťami Laplaceovej transformácie. Tie sme rozdelili do dvoch podkapitol. Predstavíme si tak množstvo vlastností tejto významnej transformácie, pričom niektoré z nich uvádzame len pre zaujímavosť.

3.1 Základné vlastnosti

Základnou vlastnosťou Laplaceovej transformácie je linearita. Tú v ďalšej časti práce využijeme ako pri dôkazoch, tak aj pri odvodzovaní numerických metód.

Veta 3.1. (*Linearita*)
Pre ľubovoľné c_1, c_2 *a funkcie* f_1, f_2, *pre ktoré existuje* $\mathcal{L}(f_1)$ *(resp.* $\mathcal{L}(f_2)$) *pre* $Re(s) > \alpha$ *(resp.* $Re(s) > \beta$*), existuje* $\mathcal{L}(c_1 f_1 + c_2 f_2)$, s*:* $Re(s) > \max\{\alpha, \beta\}$. *Platí*

$$\mathcal{L}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \mathcal{L}(f_1) + c_2 \mathcal{L}(f_2).$$

Dôkaz.

$$\int_0^\infty e^{-st} \left(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right) \mathrm{d}t =$$

$$= c_1 \int_0^\infty e^{-st} f_1(t) \mathrm{d}t + c_2 \int_0^\infty e^{-st} f_2(t) \mathrm{d}t$$

□

Z linearity vieme odvodiť nasledujúci vzťah pre polynómy.

Dôsledok 3.2. *Nech polynóm* $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots a_n t^n$, $n < \infty$. *Potom pre* $Re(s) > 0$ *platí*

$$\mathcal{L}(f(t)) = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathcal{L}(t^k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k k!}{s^{k+1}}.$$

Dôkaz. Matematickou indukciou ukážeme, že

$$\mathcal{L}(t^k) = \tfrac{k!}{s^{k+1}} \text{ pre } k = 0, 1, 2, 3, \dots.$$

Počítajme prvý krok indukcie

$$\int_0^\infty e^{-st} \mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty = \frac{1}{s}.$$

Nech teda vzťah platí pre k a počítajme pre $k+1$. Integrujme per partes

$$\mathcal{L}\left(t^{k+1}\right) = \int_0^\infty e^{-st} t^{k+1} \mathrm{d}t = \left[t^{k+1} \frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty + \frac{k+1}{s} \int_0^\infty e^{-st} t^k \mathrm{d}t = \frac{(k+1)!}{s^{k+2}}.$$

Z linearity potom plynie požadovaný vzťah. □

Predchádzajúci dôsledok vieme zovšeobecniť aj na nekonečný rad nasledujúcim spôsobom.

Dôsledok 3.3. *Ak* $f(t) = \sum_{k=0}^\infty a_k t^k$ *konverguje pre* $t \geq 0$ *s členmi* $|a_k| \leq \frac{K\alpha^k}{k!}$ *pre každé* $k \in \mathbb{N}_0$, *kde* $\alpha > 0, K > 0$, *potom*

$$\mathcal{L}(f(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathcal{L}(t^k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k k!}{s^{k+1}}, \quad Re(s) > \alpha.$$

Dôkaz. Dôkaz je technický a nachádza sa v [6] strana 18. Myšlienka dôkazu: odhadujeme $\left|\mathcal{L}(f(t)) - \sum_{k=0}^N a_k \mathcal{L}(t^n)\right|$ zhora. Ukážeme, že tento výraz konverguje k 0. □

Vieme, že $F(s) = \mathcal{L}(f)$ existuje za podmienok Vety 2.1, teda pre s také, že $Re(s) > \alpha$. Vyšetrujme teraz preto, ako sa funkcia $F(s)$ správa pre "veľké"s.

Veta 3.4. (*Konvergencia* $F(s)$)
Nech je funkcia f *exponenciálne ohraničená a spojitá. Potom jej Laplaceova transformácia* $F(s) = \mathcal{L}(f)$ *konverguje k nule pre* $Re(s) \to \infty$.

Dôkaz. Vlastnosť plynie zo vzťahu odvodeného pri dôkaze Vety 2.1

$$\left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \frac{M}{x-\alpha},$$

kde $\alpha < Re(s) = x$. Pre $x \to \infty$ dostávame požadovaný výsledok. □

Predstavme si dôležité pravidlá posunutia, ktoré ďalej využijeme, napríklad pri určovaní inverznej Laplaceovej transformácie komplexného parciálneho zlomku (Príklad 4.7). Využijeme tu skokovú funkciu u_a z Definície 1.5.

Veta 3.5. (*Prvé pravidlo posunutia*)
Nech $F(s) = \mathcal{L}\left(f\left(t\right)\right)$ *pre* $Re(s) > 0$, *potom*

$$F(s-a) = \mathcal{L}\left(e^{at} f(t)\right) \textit{ pre } a \in \mathbb{R},\ Re(s) > a.$$

Dôkaz. Počítajme

$$F(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t)\mathrm{d}t = \mathcal{L}(e^{at} f(t))$$

□

Veta 3.6. (*Druhé pravidlo posunutia*)
Nech $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ *pre* $Re(s) > 0$ *a* u_a *je skoková funkcia, potom*

$$\mathcal{L}\left(u_a\left(t\right) f\left(t-a\right)\right) = e^{-as} F(s) \textit{ pre } a \geq 0.$$

Dôkaz. Dosaďme priamo do definície Laplaceovej transformácie

$$\mathcal{L}\left(u_a\left(t\right) f\left(t-a\right)\right) = \int_0^\infty e^{-st} (u_a(t) f(t-a))\mathrm{d}t = \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\infty e^{-s(\tau+a)} f(\tau)\mathrm{d}\tau = e^{-as} \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)\mathrm{d}\tau = e^{-as} F(s).$$

□

Zaujímavou vlastnosťou Laplaceovej transformácie je aj vlastnosť škálovania. Pozrime sa preto, čo táto vlastnosť znamená.

Veta 3.7. (*Škálovanie*)
Nech je funkcia f *exponenciálne ohraničená a spojitá. Nech ďalej* $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$, $a > 0$ *a* $Re(s) > 0$. *Potom platí*

$$\mathcal{L}(f(at)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right).$$

Dôkaz. Dosadením do definície

$$\mathcal{L}(f(at)) = \int_0^\infty e^{-st} f(at)\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}at} f(at)a\mathrm{d}t.$$

Zvolíme substitúciu $\tau = at$. Potom

$$\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}at} f(at)a\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}\tau} f(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

□

Vlastnosti opísanej v predošlej vete sa hovorí škálovanie.

Veľmi dôležitou vlastnosťou je nasledujúca veta, ktorá hovorí, že Laplaceova transformácia prevádza konvolúciu na súčin. Vlastnosť sa využíva napríklad pri riešení lineárnych diferenciálnych rovníc s pravou stranou. V literatúre sa tejto vlastnosti hovorí vlastnosť konvolúcie Laplaceovej transformácie.

Veta 3.8. (*Konvolúcia*)
Nech sú f, g exponenciálne ohraničené a spojité funkcie na interavale $[0, \infty)$. Potom pre $Re(s) > \alpha$ platí

$$\mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g) = \mathcal{L}\left(f * g\right).$$

Dôkaz. Celý dôkaz je v knihe [6] na strane 92. Uveďme základnú myšlienku. Pre Laplaceove transformácie funkcií f a g platí

$$\mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g) = \left(\int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\int_0^\infty e^{-su} g(u)\mathrm{d}u =$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-s(\tau+u)} f(\tau)g(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}\tau.$$

Prevedieme substitúciu $t = \tau + u$. Ďalej využijeme vzťah odvodený pri dôkaze Vety 2.1:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \left|e^{-st} f(\tau)g(t-\tau)\right| \mathrm{d}t\mathrm{d}\tau < \infty.$$

Vďaka tomu sú splnené podmienky pre zámenu integrálov. Pri dôkaze uvažujeme v definícii Laplaceovej transformácie Lebesgueov integrál a jeho vlastnosti. □

Stáva sa, že chceme určit' Laplaceovu transformáciu periodickej funkcie. Vtedy nám výpočet ul'ahčí nasledujúca vlastnost'.

Veta 3.9. (*Laplaceova tranformácia periodickej funkcie*)
Nech $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$, kde f je ohraničená periodická funkcia s periódou T. Teda pre všetky $t \geq 0$ platí $f(t) = f(t+T)$. Potom

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) \mathrm{d}t.$$

Dôkaz. Počítajme

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \mathrm{d}t = \int_0^T e^{-st} f(t) \mathrm{d}t + \int_T^\infty e^{-st} f(t) \mathrm{d}t.$$

Pre druhý integrál zvol'me substitúciu $\tau = t - T$ a z periodicity f dostávame

$$\int_T^\infty e^{-st} f(t) \mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-s(\tau+T)} f(\tau+T) \mathrm{d}\tau = e^{-sT} \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau) \mathrm{d}\tau.$$

Teda

$$F(s) = \int_0^T e^{-st} f(t) \mathrm{d}t + e^{-sT} F(s),$$

z čoho vyjadríme

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) \mathrm{d}t.$$

□

Laplaceova transformácia má pomerne blízko ku gamma funkcii, o čom hovorí nasledujúca veta.

Veta 3.10. (*Vzt'ah s gamma funkciou*)
Nech $v \in \mathbb{R}$, $v > -1$ a nech $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$. Potom

$$\mathcal{L}(t^v) = \frac{\Gamma(v+1)}{s^{v+1}}.$$

Dôkaz. Pre $-1 < v < 0$ funkcia $f(t) = t^v$ nie je spojitá, ani exponenciálne ohraničená na $[0, \infty)$. To znamená, že neexistuje $\alpha > 0$ tak, aby bola funkcia exponenciálne ohraničená. Platí totiž $\lim_{t \to 0+} f(t) = \infty$. Ale $\int_0^\tau t^v \mathrm{d}t$ existuje

pre $v > -1$, $\tau > 0$ a $\mathcal{L}(f(t))$ existuje.
Uvažujme ďalej $s > 0$, $v > -1$ a substitúciu $x = st$. Potom

$$\mathcal{L}(t^v) = \int_0^\infty e^{-st} t^v \mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-x} \left(\frac{x}{s}\right)^v \frac{1}{s} \mathrm{d}x = \frac{1}{s^{v+1}} \int_0^\infty x^v e^{-x} \mathrm{d}x = \frac{\Gamma(v+1)}{s^{v+1}}.$$

$\square$

V príkladoch sa môžeme stretnúť s funkciou typu $g(t) = \int_0^t f(u)du$. Miesto možno náročného počitania Laplaceovej transformácie funkcie g môžme využiť nasledujúcu vlastnosť.

Veta 3.11. *Nech je funkcia f exponenciálne ohraničená a spojitá a nech ďalej $g(t) = \int_0^t f(u)du$. Potom pre $Re(s) > \alpha$ platí*

$$\mathcal{L}(g(t)) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f(t))$$

Dôkaz. Nachádza sa v [6] na strane 66. $\square$

3.2 Vzťahy s deriváciami

V tejto podkapitole sa pozrieme na dôležité vzťahy Laplaceovej transformácie, ktoré sa hojne využívajú napríklad pri riešení diferenciálnych rovníc. Začnime deriváciou samotnej Laplaceovej transformácie.

Veta 3.12. *Nech je funkcia f exponenciálne ohraničená a spojitá pre $s > \alpha$, $s \in \mathbb{R}$. Potom pre $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ platí*

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n} F(s) = \mathcal{L}\left((-1)^n t^n f(t)\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Dôkaz. Výraz spĺňa podmienky pre zámenu derivácie a integrálu (viď [2], str. 281) vďaka rovnomernej konvergencii integrálu (Poznámka 2.2). Počítajme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} F(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \int_0^\infty e^{-st} f(t) \mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} f(t) \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\infty -te^{-st} f(t) \mathrm{d}t = \mathcal{L}(-tf(t)).$$

Indukciou dostaneme požadovaný vzťah pre $s > \alpha$. Počítajme preto

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}s^{n+1}}F(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}F(s)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^\infty e^{-st}(-1)^n t^n f(t)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}e^{-st}(-1)^n t^n f(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-st}(-1)^{n+1}t^{n+1}f(t)\mathrm{d}t =$$

$$= \mathcal{L}\left((-1)^{n+1}\, t^{n+1} f\,(t)\right).$$

□

Ak je $s \in \mathbb{C}$, je vzťah pre deriváciu rovnaký, ale dôkaz odlišný. Dôležitá je nasledujúca vlastnosť holomorfnosti $F(s)$ na nejakej množine, čo znamená, že je na tejto množine diferencovateľná a teda má nekonečne veľa derivácii.

Veta 3.13. *Nech je funkcia f exponenciálne ohraničená a spojitá. Potom funkcia $F(s) = \mathcal{L}(f)$ je holomorfná na polrovine $Re(s) > \alpha$.*

Dôkaz. Zapíšme $s = x + iy$ a počítajme

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-(x+iy)t}f(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-xt}(\cos yt - i\sin yt)f(t)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\infty (e^{-xt}\cos yt)f(t)\mathrm{d}t + i\int_0^\infty(-e^{-xt}\sin yt)f(t)\mathrm{d}t = u(x,y) + iv(x,y).$$

Označme

$$u_x = \frac{\partial}{\partial x}u, \quad u_y = \frac{\partial}{\partial y}u$$

$$v_x = \frac{\partial}{\partial x}v, \quad v_y = \frac{\partial}{\partial y}v$$

Počítajme deriváciu. Podmienky pre zámenu integrálu a derivácie sú splnené, lebo platí

$$\left|\int_{t_0}^\infty \frac{\partial}{\partial x}(e^{-xt}\cos yt f(t))\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{t_0}^\infty(-te^{-xt}\cos yt)f(t)\mathrm{d}t\right| \le$$

$$\le \int_0^\infty te^{-xt}|f(t)|\mathrm{d}t \le M\int_{t_0}^\infty e^{-(x-\alpha-\delta)t}\mathrm{d}t \le \frac{M}{x-\alpha-\delta}e^{-(x-\alpha-\delta)t_0}, \quad \delta > 0.$$

Parameter δ vieme zvoliť ľubovoľne malý, preto na množine $\{\beta; Re(\beta) > \alpha + \delta\}$ integrál konverguje rovnomerne. Potom

$$u_x = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-xt} \cos yt\right) f(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty \left(-te^{-xt} \cos yt\right) f(t)\mathrm{d}t$$

$$v_y = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y} \left(-e^{-xt} \sin yt\right) f(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty \left(-te^{-xt} \cos yt\right) f(t)\mathrm{d}t.$$

Teda $u_x = v_y$. Rovnakým spôsobom vieme ukázať, že $u_y = -v_x$. Derivácie sú spojité a Cauchy-Riemannove podmienky sú splnené, a teda $F(s)$ je holomorfná funkcia na tejto polrovine. $\square$

Veta 3.14. *Nech je funkcia f exponenciálne ohraničená a spojitá pre $s \in \mathbb{C}$, $Re(s) > \alpha$. Potom pre $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ platí*

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n} F(s) = \mathcal{L}\left(\left(-1\right)^n t^n f\left(t\right)\right), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Dôkaz. V knihe [6], str. 31. Uveďme si základnú myšlienku. Píšme ako v dôkaze predchádzajúcej vety

$$F(s) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Potom

$$F'(s) = u_x + iv_x = \int_0^\infty (-te^{-xt} \cos yt) f(t)\mathrm{d}t + i \int_0^\infty (-te^{-xt} \sin yt) f(t)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\infty (-te^{-xt}(\cos yt - \sin yt)) f(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty -te^{-st} f(t)\mathrm{d}t = \mathcal{L}(-tf(t)).$$

Matematickou indukciou obdržíme tvrdenie vety. $\square$

Ďalej sa pozrieme na derivácie typu $\mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right)$, ktoré zohrávajú dôležitú úlohu pri riešení diferenciálnych rovníc. Aplikovaním Laplaceovej transformácie sa prevádzajú diferenciálne rovnice s konštantnými koeficientami na algebraické rovnice.

Veta 3.15. *Nech je funkcia f exponenciálne ohraničená a spojitá na $[0, \infty)$ a f' je spojitá funkcia na $[0, \infty)$. Potom pre $Re(s) > \alpha$ platí*

$$\mathcal{L}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0).$$

Dôkaz. Zapíšme si integrál s využitím limity a integrujme per partes

$$\int_0^\infty e^{-st} f'(t)\mathrm{d}t = \lim_{\delta\to 0,\ \tau\to\infty} \int_\delta^\tau e^{-st} f'(t)\mathrm{d}t =$$

$$= \lim_{\delta\to 0,\ \tau\to\infty} \left(\left[e^{-st} f(t)\right]_\delta^\tau + s\int_\delta^\tau e^{-st} f(t)\mathrm{d}t \right) =$$

$$= -f(0) + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{d}t$$

lebo $|e^{-s\tau} f(\tau)| \leq e^{-x\tau} M e^{\alpha\tau}$, čo konverguje k 0 pre $\tau \to \infty$ a $Re(s) = x > \alpha$. Potom

$$\mathcal{L}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0).$$

□

Vzorec vieme indukciou zovšeobecniť do nasledujúceho tvaru.

Veta 3.16. *Nech sú funkcie $f, f', \cdots f^{(n-1)}$ exponenciálne ohraničené a spojité na $[0,\infty)$ a $f^{(n)}$ je spojitá na $[0,\infty)$. Potom pre $Re(s) > \alpha$ platí*

$$\mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right) = s^n \mathcal{L}(f(t)) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

Dôkaz. Prevedieme matematickú indukciu, prvý krok sme ukázali v predošlej vete. Nech teda pre prirodzené $k < n$ je $f^{(k)}$ exponenciálne ohraničená a spojitá na $[0,\infty)$ a $f^{(k+1)}$ je spojitá na $[0,\infty)$. Potom

$$\mathcal{L}\left(f^{(k+1)}(t)\right) = \lim_{\delta\to 0,\tau\to\infty} \int_\delta^\tau e^{-st} f^{(k+1)}(t)\mathrm{d}t =$$

$$= \lim_{\delta\to 0,\tau\to\infty} \left(\left[e^{-st} f^{(k)}(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f^{(k)}\mathrm{d}t \right) = -f^{(k)}(0) + s\mathcal{L}(f^{(k)}(t)) =$$

$$= s^k \mathcal{L}(f(t)) - s^k f(0) - s^{k-1} f'(0) - \cdots - f^{(k)}(0).$$

□

Uveďme dôsledky konvergencie F(s) (Vety 3.4) a vzťahu z Vety 3.15. Získavame tak vzťahy medzi hodnotami funkcie a jej Laplaceovej transformácie v počiatku a nekonečne.

Dôsledok 3.17. *Hodnota v počiatku.*
Nech funkcie f, f' *spĺňajú podmienky ako vo Vete 3.15 a* $F(s) = \mathcal{L}(f)$, $s \in \mathbb{R}$. *Potom*

$$f(0) = \lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

Dôsledok 3.18. *Hodnota v nekonečne.*
Nech funkcia f, f' *spĺňajú podmienky ako vo Vete 3.15 a nech d'alej existuje limita* $\lim_{t \to \infty} f(t)$ *a nech* $F(s) = \mathcal{L}(f)$, $s \in \mathbb{R}$. *Potom*

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s).$$

Dôkazy týchto vzt'ahov sú uvedené v [6] od strany 88, pričom plynú z vyššie uvedených viet.

Kapitola 4

Inverzná Laplaceova transformácia

4.1 Existencia a vlastnosti

Po aplikácii Laplaceovej transformácie a využití jej vlastností potrebujeme určiť inverziu získanej funkcie. Ako ukážeme, problém nájdenia inverznej Laplaceovej transformácie je ďaleko zložitejší, než sa na prvý pohľad môže zdať.

Začnime príkladom.

Príklad 4.1. *Nech sú dané funkcie* $f(t) = \sin \omega t$ *pre* $t \geq 0$ *a* $g(t) = \sin \omega t$ *pre* $t > 0$ *a* $g(t) = 1$ *pre* $t = 0$. *Potom integrovaním per partes*

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \mathcal{L}(g(t)),$$

a teda $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right)$ *nie je jednoznačné.*

Laplaceova transformácia nie je prostá, avšak podmienkou existencie inverzie je jednoznačnosť. Práve o nej hovorí nasledujúce tvrdenie.

Tvrdenie 4.2. (*Lerchova veta*)
Ak sú f, g *spojité funkcie na* $[0, \infty)$ *a* $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$, *potom* $f = g$.

Dôkaz. Dôkaz je technicky náročný a je k nájdeniu v knihe [7], kapitola 2.6, strana 61. $\square$

V práci si vystačíme so spojitými funkciami, pre úplnosť uveďme nasledujúcu poznámku prevzatú zo stránky [4].

Poznámka 4.3. *Ak platí, že $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$, potom $f = g$ skoro všade. Hovoríme, že Laplaceova transformácia (ako typ integrálnej transformácie) je jednoznačná v Lerchovom zmysle.*

Uveďme teda definíciu inverznej Laplaceovej transformácie. Jej integrálna forma je tiež známa ako Bromwichov integrál. Definícia je prevzatá zo stránky [8], jej stručné odvodenie sa nachádza v [6], str. 152.

Definícia 4.4. (*Inverzná Laplaceova transformácia a jej integrálna forma*)
Nech s je zvolené tak, že $Re(s) = \gamma > 0$ a zároveň γ je väčšia ako reálna časť všetkých singularít $F(s)$. Potom

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}F(s)\mathrm{d}s = f(t),$$

kde sa integruje po vertikále $Re(s) = \gamma$ v komplexnej rovine.

Výraz opticky pripomína inverznú Fourierovu transformáciu. O vzťahu s touto známou transformáciou hovorí nasledujúca poznámka.

Poznámka 4.5. *V prípade, že je reálna časť všetkých singularít $F(s)$ záporná, môžme zvoliť $\gamma = 0$ a inverzná Laplaceova transformácia je totožná s inverznou Fourierovou transformáciou.*

Dôkaz. Dosadením získame priamo požadovanú definíciu. $\square$

Tvrdenie 4.6. *Nasledujúce vlastnosti inverznej Laplaceovej transformácie plynú z vlastností Laplaceovej transformácie. Nech F, G sú Laplaceove transformácie funkcií f, g.*
(***Linearita***)
Inverzná Laplaceova transformácia je lineárna. Platí

$$\mathcal{L}^{-1}\left(aF(s) + bG(s)\right) = af(t) + bg(t),$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $Re(s) > 0$.

(***Druhé pravidlo posunutia***)
To môže byť vyjadrené pre $a, t \geq 0$ a $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ inverznou formulou

$$\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-as}F(s)\right) = u_a(t)f(t-a),$$

kde u_a je skoková funkcia a $Re(s) > 0$.

(***Konvolúcia***)
Nech existujú $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ *a* $G(s) = \mathcal{L}(g(t))$. *Potom pre* $Re(s) > 0$

$$\mathcal{L}^{-1}(FG) = \mathcal{L}^{-1}(F) * \mathcal{L}^{-1}(G).$$

(***Derivácia***)
Za predpokladov Vety 3.16 platí vzt'ah

$$f(t) = -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F(s)\right) \qquad t > 0.$$

Dôkaz plynie priamo z definície inverznej Laplaceovej transformácie.

Uveďme teraz príklad, ktorého vyriešením získame mimoriadne dôležitý vzt'ah, ktorý v práci d'alej využijeme. S jeho pomocou dokážeme určit' Laplaceovu transformácu akéhokol'vek komplexného parciálneho zlomku. Je teda zrejmé, že rozklad na komplexné parciálne zlomky ([1], str. 89) je tak častým nástrojom pri určovaní inverznej Laplaceovej transformácie.

Príklad 4.7. *Uvažujme funkciu* $f(t) = t$, *kde* $t \geq 0$. *Z Dôsledku 3.2 vieme, že*

$$\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}, \quad Re(s) > 0.$$

Z prvého pravidla posunutia (*Veta 3.3*) *potom*

$$\mathcal{L}(te^{at}) = \frac{1}{(s-a)^2}, \quad Re(s) > a.$$

Všeobecne pre $n \in \mathbb{N}_0$

$$\mathcal{L}(t^n e^{at}) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad Re(s) > a.$$

Vzt'ah sme dokázali indukciou v Dôsledku 3.2 pre $a = 0$ *a aplikovaním prvého pravidla posunutia (Veta 3.5) dostávame*

$$\mathcal{L}\left(t^n\right) = \frac{n!}{s^{n+1}} \Rightarrow \mathcal{L}(t^n e^{at}) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}.$$

Získali sme tak dôležitý vzt'ah

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-a)^{n+1}}\right) = \frac{t^n e^{at}}{n!}.$$

Všeobecný komplexný parciálny zlomok je tvaru $\frac{c}{(x-a)^n}$, *kde* c, a *sú konštanty,* $k = 1, 2, \ldots$, *z linearity Laplaceovej transformácie plynie, že pomocou tohto vzt'ahu vieme určit' inverznú Laplaceovu transformáciu takéhoto zlomku.*

Kapitola 5

Numerické metódy výpočtu inverznej Laplaceovej transformácie

Problém riešenia inverznej Laplaceovej transformácie je komplikovanejší, ako sa môže na prvý pohľad zdať. Z linearity vieme, že

$$\mathcal{L}\left(f(t) + e^{1+ib}t\right) = F(s) + (s - 1 - ib)^{-1}.$$

Ak sa na tento príklad pozrieme obrátene, tak vidíme, že pokým $(s - 1 - ib)^{-1}$ konverguje pre $b \in \mathbb{R}$, $b \to \infty$, rovnomerne k nule, výraz $e^{1+ib}t$ je neohraničený. Úloha nájsť inverznú Laplaceovu transformáciu patrí do skupiny tzv. *ill-posed* úloh. Jej riešením sa zaoberali mnohí známi matematici.

5.1 Využitie ortogonálnych polynómov

V tejto časti si ukážeme niektoré výsledky maďarského matematika Lanczosa a gréckeho matematika Papoula. Uveďme najskôr potrebné definície známych ortogonálnych polynómov.

Definícia 5.1. *Čebyševov polynóm prvého druhu.*
Označme $T_n(x)$ Čebyševov polynóm prvého druhu stupňa n nad intervalom $[-1, 1]$. Definovaný je predpisom

$$T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k} = \cos\left(n \arccos x\right),$$

kde $\lfloor n/2 \rfloor$ značí dolnú celú časť reálneho čísla $n/2$.
V literatúre sa uvádza aj iné vyjadrenie tohto polynómu, známe ako Rodriguezovo vyjadrenie:

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n (1-x^2)^{1/2} \sqrt{\pi}}{2^{n+1} \Gamma(n+1/2)} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left((1-x^2)^{n-1/2} \right).$$

Definícia 5.2. *Čebyševov polynóm druhého druhu.*
Označme $U_n(x)$ Čebyševov polynóm druhého druhu stupňa n nad intervalom $[-1, 1]$. Definovaný je predpisom

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k} = \frac{T'_{n+1}(x)}{n+1}.$$

Teda po substitúcii získavame vzťah

$$U_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

Rodriguezove vyjadrenie $U_n(x)$ je

$$U_n(x) = \frac{(-1)^n (n+1) \sqrt{\pi}}{(1-x^2)^{1/2} 2^{n+1} \Gamma(n+3/2)} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left((1-x^2)^{n+1/2} \right).$$

Definícia 5.3. *Laguerrov polynóm.*
Označme $L_n(x)$ Laguerrov polynóm stupňa n nad intervalom $[0, \infty)$. Definovaný je predpisom

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{n-k} \frac{1}{k!} x^k.$$

Rodriguezove vyjadrenie $L_n(x)$ je

$$L_n(x) = \frac{1}{n! e^{-x}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left(x^n e^{-x} \right).$$

Definícia 5.4. *Legendrov polynóm.*
Označme $P_n(x)$ Legendrov polynóm stupňa n nad intervalom $[-1, 1]$. Definovaný je predpisom

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-2k}{n} x^{n-2k}.$$

Rodriguezove vyjadrenie $P_n(x)$ je

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left((1-x^2)^n\right).$$

Poznámka 5.5. *V ďalšom texte uvažujme nasledovné podmienky. Funkcia $f(t)$ je spojitá exponenciálne ohraničená, $Re(s) > 0$ a všetky body singularity $F(s)$ ležia naľavo od priamky $Re(s) = c > 0$.*

Potom z Vety 3.4 vieme, že $\lim_{Re(s)\to\infty} F(s) = 0$ a môžme vyjadriť funkciu $F(s) = e^{-\alpha}\phi(s)$, kde $\phi(s)$ je ohraničená funkcia na polrovine $Re(s) \geq c$. A túto funkciu môžme interpolovať.
Nasledujúca metóda je odvodená Papoulom, ktorý využil Legendrove polynómy. Je uvedená v [3], str. 329.

Metóda 5.6. *Preveďme subtitúciu $e^{-\sigma t} = x$ pre $\sigma > 0$, a teda*

$$f(t) = f\left(-\frac{\ln x}{\sigma}\right) = \phi(x), \quad \sigma > 0.$$

Tým sme previedli časový interval $t \in [0,\infty)$ na $x \in (0,1]$. Potom Laplaceovu transformáciu dostaneme v tvare

$$\sigma F(s) = \int_0^1 x^{s/\sigma - 1}\phi(x)\mathrm{d}x,$$

z čoho dostávame voľbou $s = (2k+1)\sigma$ vzťah

$$\sigma F\left((2k+1)\,\sigma\right) = \int_0^1 x^{2k}\phi(x)\mathrm{d}x.$$

Rozšírme funkciu $\phi(x)$ párne aj na zápornú časť, teda $\phi(-x) = \phi(x)$. Párnu funkciu $\phi(x)$ potom môžme interpolovať lineárnou kombináciou Legendrových polynómov párneho stupňa

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k P_{2k}(x).$$

Ak sa vrátime k definícii funkcie $\phi(x)$, dostávame

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k P_{2k}\left(e^{-\sigma t}\right),$$

kde koeficienty c_k sú určené $\mathcal{L}(f(t))$. Využitím vzt'ahu z Vety 3.3 o Laplaceovej transformácii polynómu tak dostávame

$$F(s) = \frac{c_0}{s} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(s-\sigma)(s-3\sigma)\dots(s-(2k-1)\sigma)}{s(s+2\sigma)\dots(s+2k\sigma)} c_k.$$

Ak v tomto výraze postupne nahradíme $s = \sigma$, $s = 3\sigma$,..., $s = (n+1)\sigma$,... dostávame systém $(k+1)$ rovníc

$$\sigma F(\sigma) = c_0$$

$$\sigma F(3\sigma) = \frac{1}{3}c_0 + \frac{2}{15}c_1$$

$$\sigma F\left((2k+1)\sigma\right) = \frac{c_0}{2k+1} + \frac{2kc_1}{(2k+1)(2k+3)} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{2^k k! c_k}{(2k+1)(2k+3)\dots(4k+1)}.$$

Jeho vyriešením získame hl'adané koeficienty c_k.
Vol'ba σ závisí na počte uvažovaných podmienok (počet členov sumy) vo vzt'ahu

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k P_{2k}\left(e^{-\sigma t}\right).$$

Metódu pre numerické testy nevyužijeme, lebo koeficienty polynómu rastú príliš rýchlo, čo výrazne limituje počet členov sumy. Na možnost' nepresného výsledku spôsobenú zaokrúhl'ovacími chybami nás, po naprogramovaní metódy, upozornil aj Matlab.

Pozrime sa d'alej na metódu, ktorú odvodil Lanczos s využitím Čebyševových polynómov. Metóda je opísaná v [3], str.333.

Metóda 5.7. *V tomto prípade najskôr normalizujeme funkciu do tvaru $f(0) = 0$. Vo vzt'ahu z Definície 4.4*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} F(s) \mathrm{d}s$$

preveďme tieto úpravy:
Zvoľme substitúciu $s = z + a$ *a prenásobme rovnosť výrazom* e^{-at}. *Dostávame tak výraz*

$$\kappa(t) := f(t)e^{-at} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{zt}K(z)\mathrm{d}z,$$

kde

$$K(z) = \int_0^\infty \kappa(t)e^{-zt}\mathrm{d}t.$$

Ak je $\kappa(0) = 0$*, máme hotovo. Ak nie, potom môžme* $\kappa(t)$ *nahradiť funkciou* $\kappa^*(t) = \kappa(t) - \alpha e^{-t}$*, kde* $\alpha = \kappa^*(0) = \lim_{z\to\infty} zK(z)$*. Takto upravenú funkciu označme pre jednoduchosť opäť* $f(t) = \kappa^*(t)$*, a teda pre novú funkciu platí* $f(0) = 0$*. Použime ďalej substitúciu* $\xi = e^{-t}$*. Dostávame tak vzťah*

$$F(s) = \int_0^1 f\left(-\ln \xi\right)\xi^{s-1}\mathrm{d}\xi = \int_0^1 \phi(\xi)\xi^{s-1}\mathrm{d}\xi,$$

v ktorom ak ďalej použijeme substitúciu $\xi = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)$*, dostaneme*

$$f(-\ln \xi) = \phi(\xi) = \phi\left(\frac{1}{2}(1 + \cos\theta)\right) = \psi(\theta).$$

Vďaka normalizácii $f(0) = 0$ *dostávame* $\psi(0) = 0$*, a pretože* $\theta = \pi$ *zodpovedá* $t \to \infty$*, platí* $\psi(\pi) = 0$ *(z normalizácie). Môžme teda funkciu* $\psi(\theta)$ *vyjadriť v závislosti na* $\sin k\theta$ *pomocou Fourierovej rady ako*

$$\psi(\theta) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\theta,$$

kde koeficienty

$$b_k = \frac{1}{2}\int_0^\pi \psi(\theta)\sin k\theta \mathrm{d}\theta.$$

Ak sa vrátime k ξ*, potom z Definície 5.2 obdržíme*

$$b_k = \frac{1}{2}\int_0^\pi \psi(\theta)\sin k\theta \mathrm{d}\theta = \int_0^1 \phi(\xi)\frac{\sin k\theta}{\sin\theta}\mathrm{d}\xi = \int_0^1 \phi(\xi)U_{k-1}(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Ak vyjadríme Čebyševov polynóm druhého druhu stupňa k *ako* $U_k = \sum_{i=0}^{k}\alpha_i\xi^i$*, potom*

$$b_k = \int_0^1 \phi(\xi)U_{k-1}(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_0^1 \phi(\xi)\sum_{i=0}^{k-1}\left(\alpha_i\xi^i\right)\mathrm{d}\xi =$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \int_0^1 \phi(\xi)\xi^i \mathrm{d}\xi = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i F(i+1).$$

Koeficienty $U_k(\xi)$ *poznáme, a teda vieme určiť* b_k.

Ukážme si aj Lanczosovu metódu s využitím Laguerrových polynómov. Táto metóda sa nachádza v [3], str. 340.

Metóda 5.8. *Rovnako ako v predošlej metóde, preveďme normalizáciu funkcie* $f(t)$. *Získame*

$$\kappa^*(t) = f(t)e^{-at} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{zt} K(z) \mathrm{d}z,$$

kde

$$K(z) = \int_0^\infty \kappa(t) e^{-zt} \mathrm{d}t$$

a $\kappa^*(0) = 0$, *ako aj* $\lim_{t\to\infty} \kappa^*(t) = 0$. *Všimnime si, že vďaka Vete 3.13 vieme, že funkcia* $K(z)$ *je holomorfná na celej polrovine* $Re(z) \geq 0$. *Túto polrovinu vieme transformovať do jednotkového kruhu nasledovnou transformáciou*

$$z = \frac{1-v}{1+v} = -1 + \frac{2}{1+v}, \quad \mathrm{d}z = -\frac{2\mathrm{d}v}{(1+v)^2} = -\frac{(z+1)^2}{2}\mathrm{d}v.$$

Potom dosadením dostaneme

$$\kappa^*(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{1} e^{(1-v)t/(1+v)} K\left(\frac{1-v}{1+v}\right) \frac{2}{(1+v)^2} \mathrm{d}v.$$

Preveďme Maclaurinov rozvoj $K(z)$

$$K\left(\frac{1-v}{1+v}\right) \frac{2}{(1+v)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k v^k$$

$$K(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 2c_k \frac{(1-z)^k}{(1+z)^{k+2}}.$$

Nech $z = 1 + z_1$, *potom*

$$\psi(z_1) := K(1+z_1) = \sum_{k=0}^{\infty} 2c_k \frac{(-1)^k z_1^k}{(2+z_1)^{k+2}}.$$

Potom teda

$$\psi(z_1) = \int_0^\infty e^{-(1+z_1)t}\kappa^*(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-t}e^{-z_1 t}\kappa^*(t)\mathrm{d}t.$$

Tým sme počiatočný problém zredukovali na problém nájdenia $\mathcal{L}^{-1}(\psi(z_1))$*, z čoho získame* $\mathcal{L}^{-1}(K(z))$. *Zaujíma nás teda* $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{z_1^k}{(z_1+2)^{k+2}}\right)$. *Ďalej využitím vzt'ahu z Príkladu 4.7 a vzt'ahu o derivácii vo Vete 3.16 dostávame, že*

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{z_1^k}{(z_1+2)^{k+2}}\right) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\left(\frac{t^{k+1}e^{-2t}}{(k+1)!}\right).$$

Z Rodriguezovej definície Laguerrovho polynómu 4.9 vieme, že

$$L_n(x) = \frac{1}{n!e^{-x}}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^n e^{-x}\right),$$

a teda dostávame

$$\mathcal{L}\left(e^{-2t}L_n(2t)\right) = \frac{z_1^n}{(z_1+2)^{n+1}}.$$

Položme funkciu $g(t) = e^{-2t}\left(L_k(2t) - L_{k+1}(2t)\right)$*.Pre* $G(z_1) = \mathcal{L}(g(t))$ *potom platí*

$$G(z_1) = \frac{z_1^k}{(z_1+2)^{k+1}} - \frac{z_1^{k+1}}{(z_1+2)^{k+2}} = \frac{2z_1^k}{(z_1+2)^{k+2}}.$$

Ak sa vrátime k premennej z*, využitím predošlej rovnosti dostávame*

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2(1-z)^k}{(1+z)^{k+2}}\right) = (-1)^k e^{-2t}\left(L_k(2t) - L_{k+1}(2t)\right) =$$

$$= (-1)^k\left(\phi_k(2t) - \phi_{k+1}(2t)\right),$$

kde $\phi_k(t) = e^{-t}L_k(t)$.
Potom teda

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\psi(z)\right) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\phi_k(2t) - \phi_{k+1}(2t)\right).$$

Pôvodná znormalizovaná funkcia $\kappa^*(t)$ *je potom*

$$\kappa^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k c_k\left(\phi_k(2t) - \phi_{k+1}(2t)\right).$$

Poznámka 5.9. *Predošlé metódy sú zaujímavé z teoretického hl'adiska. Avšak z praktického hl'adiska sú na programovanie nevhodné. Substitúciou intervalu* $[0, \infty)$ *do* $(0, 1]$ *získavame vel'ké zaokrúhl'ovacie chyby. Ďalším problémom je príliš rýchly rast koeficientov polynómov, čím obdržíme d'alšie chyby a sme nútení vel'mi limitovat' počet členov sumy. V prípade Lanczosových metód je d'alším problémom normalizácia funkcie a nutné vyjadrenie* $K(z)$.

5.2 Využitie Fourierovej transformácie

Zamerajme sa d'alej na využitie Fourierovej transformácie. Tá má tvar

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos \omega t) - i \sin \omega t \mathrm{d}t.$$

Teda v prípade nepárnej funkcie

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t) \sin \omega t \mathrm{d}t,$$

z čoho

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} \hat{f}(\omega) \sin \omega t \mathrm{d}\omega.$$

Obdobne pre párnu funkciu

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t) \cos \omega t \mathrm{d}t.$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} \hat{f}(\omega) \cos \omega t \mathrm{d}\omega.$$

Tejto vlastnosti využijeme v d'alšej metóde, ktorú odvodili matematici Dubner a Agate. Metóda je opísaná v [3], str. 361.

Metóda 5.10. *Ak v Definícii 1.2 Laplaceovej transformácie rozdelíme komplexnú premennú* s *na jej reálnu a imaginárnu čast'* $s = c + i\omega$, *dostávame*

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-(c+i\omega)t} f(t) \mathrm{d}t.$$

Potom

$$Re\,(F(s)) = \int_0^\infty e^{-ct} f(t)\cos\omega t \mathrm{d}t$$
$$Im\,(F(s)) = -\int_0^\infty e^{-ct} f(t)\sin\omega t \mathrm{d}t,$$

čím sme dostali Fourierovu cosínusovú a sínusovú transformáciu $f(t)$. *Zaveďme* a_0 *reálnu konštantu takú, že všetky body singularity F(s) ležia naľavo od* a_0. *Nech ďalej* $Re(s) = c \geq a_0$. *Potom vieme, že platí*

$$f(t) = \frac{2^{ct}}{\pi}\int_0^\infty Re\,(F(s))\cos\omega t \mathrm{d}\omega = -\frac{2^{ct}}{\pi}\int_0^\infty Im\,(F(s))\sin\omega t \mathrm{d}\omega,$$

čím sme pôvodný problém zredukovali na výpočet jedného z integrálov. Zaveďme ďalej reálnu funkciu $h(t)$ *takú, že* $h(t) = 0$ *pre* $t < 0$ *a pokryme interval* $[0, \infty)$ *subintervalmi* $(nT, (n+1)T)$ (*pre* $n \to \infty$ *pokryjeme celý interval*) *a na intervale* $((n-1)T, (n+1)T)$ *uvažujme funkciu* $h(t)$ *a definujme párne periodické funkcie s periódou* $2T$

$$\begin{aligned} g_n(t) &= h(t) && nT \leq t \leq (n+1)T \\ &= h(2nT - t) && (n-1)T \leq t \leq nT. \end{aligned}$$

Nahradením t *za* $nT + t$, *dostaneme pre párne hodnoty* n

$$\begin{aligned} g_n(t) &= h(nT + t) && 0 \leq t \leq T \\ &= h(nT - t) && -T \leq t \leq 0. \end{aligned}$$

a pre n *nepárne*

$$\begin{aligned} g_n(t) &= h((n+1)T - t) && 0 \leq t \leq T \\ &= h((n+1)T + t) && -T \leq t \leq 0. \end{aligned}$$

Použitím Fourierovej rady pre $g_n(t)$ *dostávame*

$$g_n(t) = \frac{A_{n,0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{n,k}\cos\omega_k t, \quad \omega_k = k\pi/T,$$

kde

$$\begin{aligned} A_{n,k} &= \frac{2}{T}\int_0^T h(nT + x)\cos\omega_k t \mathrm{d}x && n = 0, 2, 4, \ldots \\ &= \frac{2}{T}\int_0^T h((n+1)T - x)\cos\omega_k t \mathrm{d}x && n = 1, 3, 5, \ldots \end{aligned}$$

Všeobecne teda

$$A_{n,k} = \frac{2}{T} \int_{nT}^{(n+1)T} h(x) \cos \omega_k t \mathrm{d}x.$$

Ak označíme

$$A(\omega_k) = \int_0^\infty h(t) \cos \omega_k t \mathrm{d}t,$$

potom

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(t) = \frac{2}{T} \left(\frac{A(\omega_0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A(\omega_k) \cos \omega_k t \right).$$

Ak $h(t) = e^{-ct} f(t)$, potom tento vzťah reprezentuje Laplaceovu transformáciu reálnej funkcie $f(t)$ s parametrom $s = c + i\omega_k$. Vidíme, že $A(\omega_k) = Re(F(s))$. Po prenásobení e^{ct} dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{ct} g_n(t) = \frac{2e^{ct}}{T} \left(\frac{1}{2} Re(F(c)) + \sum_{k=1}^{\infty} Re\left(F(c + i\omega_k)\right) \cos \omega_k t \right)$$

Prvý člen súčtu na ľavej strane je $e^{ct} g_0(t) = f(t)$ pre $t \in [0, T]$, zbytok súčtu reprezentuje chybu E, ktorá je na intervale $(0, T)$

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} e^{ct} g_n(t) = e^{ct} \sum_{n=1}^{\infty} \left(h(2n + t) + h(2n - t)\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2cnT} \big(f(2n + t) + e^{2ct} f(2n - t) \big).$$

Aplikovaním lichobežníkového pravidla s dĺžkou kroku π/T na výraz odvodený v úvode rozboru metódy

$$f(t) = \frac{2^{ct}}{\pi} \int_0^\infty Re\left(F(c + i\omega_k)\right) \cos \omega_k t \mathrm{d}\omega_k$$

dostávame opäť výraz

$$f(t) \approx \frac{2e^{ct}}{T} \left(\frac{1}{2} Re(F(c)) + \sum_{k=1}^{\infty} Re\left(F(c + i\omega_k)\right) \cos \omega_k t \right).$$

Chyba E je závislá na dĺžke kroku aj na parametri c. Ten vieme zvoliť tak, aby sme minimalizovali túto chybu. Na intervale $t \leq T/2$ tak môžme získať výsledok

s požadovanou presnosťou.
Vieme, že c je také, že všetky body singularity $F(s)$ ležia naľavo od $Re(s) = c$ a predpokladáme, že $F(s)$ nemá singularity napravo od počiatku (inak spravíme transláciu). Predpokladáme ďalej, že funkcia $f(t)$ je zhora ohraničená nejakou funkciou typu Ct^m, kde C je konštanta a $m \in \mathbb{N}_0$.
Nech $m = 0$, potom dostávame odhad pre chybu dosadením do vzťahu pre E ako

$$E_1 =\leq Ce^{c(t-T)}\frac{\cosh ct}{\sinh cT}.$$

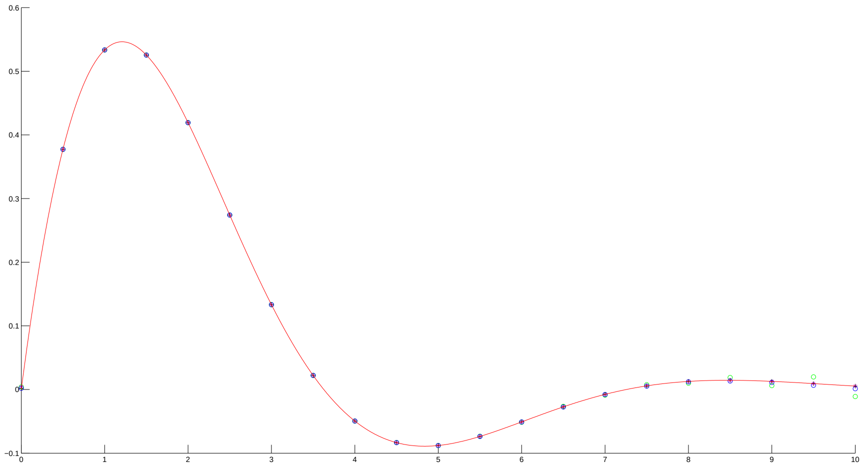
Vidíme teda, že čím bližšie bude $t \to T$, chyba bude narastať. Z toho dôvodu je vhodné vzťah odvodený pre $f(t)$ aplikovať pre $t \in (0, T/2)$. Chyba na tomto intervale je potom $E_1 \leq Ce^{-cT/2}$. Nech je ďalej $m > 0$, potom

$$E_1 \leq Ce^{-cT/2}\frac{\cosh cT/2}{\sinh cT} \approx C(1.5T)^m e^{-cT}.$$

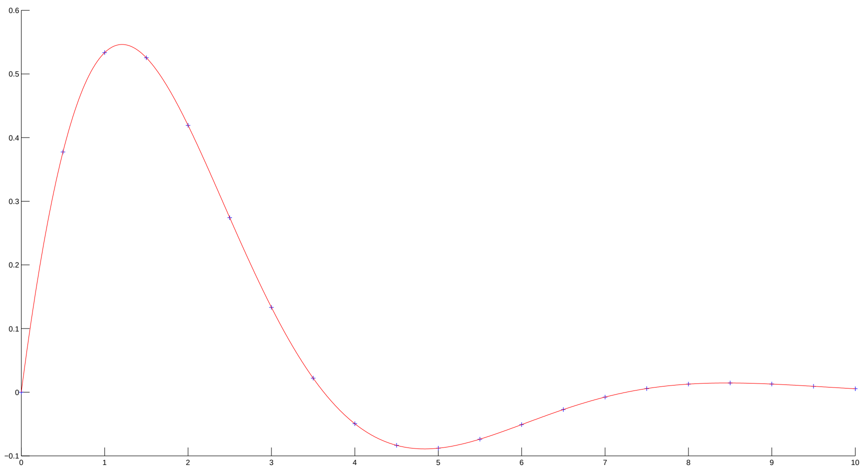
Zhrňme si na záver túto metódu: Najskôr zvolíme interval na ktorom budeme inverziu rátať. Ak máme $0 \leq t \leq t_1$, zvolíme $T = 2t_1$ a zvolíme parameter c, aby bola chyba v tolerancii a môžme využiť vzťah odvodený pre výpočet $f(t)$.

Táto metóda už ponúka dobré výsledky. Použijeme ju preto aj na numerické testy. Existuje množstvo ďalších metód výpočtu inverznej Laplaceovej transformácie, pričom niektoré z nich sú postavené na nami uvedených metódach a ďalej ich zlepšujú, ako si v stručnosti naznačíme v závere práce.
Pre potrebu numerických testov sme využili softvér Matlab R2007b, ktorý už má zabudovanú funkciu `ilaplace`, ktorá vracia predpis inverznej Laplaceovej transformácie. Túto funkciu sme využili pre obdržanie presného riešenia. Pre naše numerické testy sme využili funkcie `DubAb` a `Riem`. Prvú menovanú sme naprogramovali podľa vyššie uvedenej metódy a funkciu `Riem` podľa Tzouovej metódy rozobranej v samom závere práce. Rozbor parametrov funkcií je priamo v zdrojovom kóde funkcií, ktoré sa nachádzajú na priloženom médiu.

Príklad 5.11. *Majme danú funkciu $F(s) = 1/(s^2 + s + 1)$. Hľadajme inverznú Laplaceovu transformáciu na intervale $[0, 10]$. Riešme najskôr funkciou `DubAb`. Aby sme vyskúšali vplyv vstupných parametrov, volíme dve hodnoty parametra $c = 0,4$ resp. $0,9$ a počet členov v sume 1000 resp. 2000. Na grafe červenou krivkou znázorníme graf presného riešenia. Zelené krúžky znározňujú výsledok pre $n = 1000$ a $c = 0,9$, magentové krížiky pre $n = 1000$ a $c = 0,4$, modré krúžky pre $n = 2000$ a $c = 0,9$ a čierne + pre $n = 2000$ a $c = 0,4$. Krok je $0,5$.*

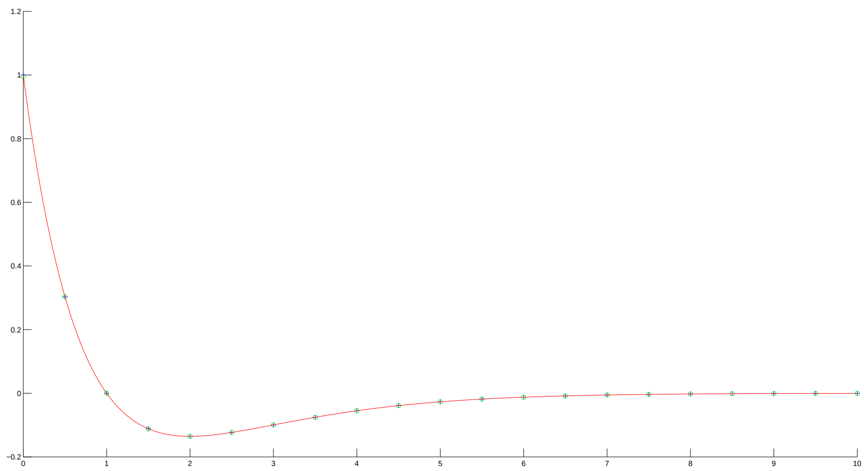


Vidíme, že blízko nuly sú všetky riešenia presné. S narastajúcim t sa dostavujú odchýlky a najpresnejšie sa ukázali byt' riešenia s vol'bou $c = 0.4$.
Tú istú funkciu riešme metódou `Riem` *s parametrami $n = 2000$ a krokom $0,5$.*

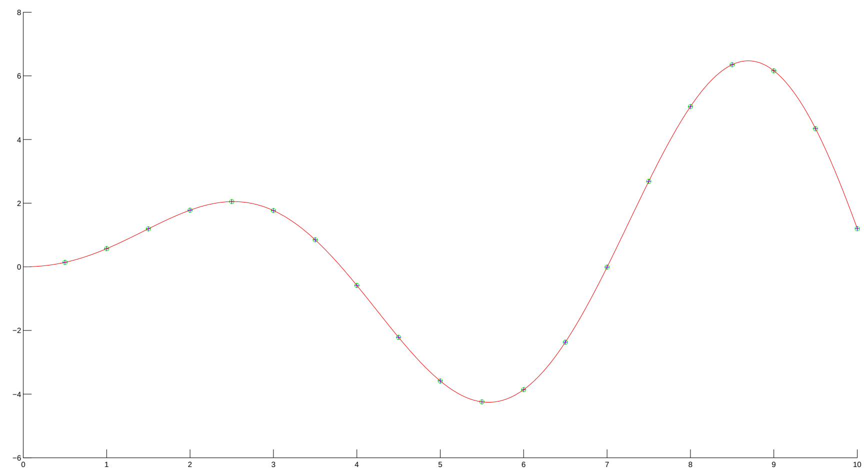


Príklad 5.12. *Majme danú funkciu $F(s) = \frac{s}{(s+1)^2}$. Hl'adajme inverznú funkciu na intervale $[0, 10]$. Vstupné údaje pre* `DubAb` *uvažujme $c = 0,4$, $n = 2000$ je*

spoločný pre obe metódy. Zelené krúžky znázorňujú metódu `DubAb` *a modré + zasa metódu* `Riem`*.*



Príklad 5.13. *Majme danú funkciu* $F(s) = \frac{s+1}{(s^2+1)^2}$*. Hl'adajme inverznú funkciu na intervale* $[0, 10]$*. Vstupné údaje pre* `DubAb` *uvažujme* $c = 0,4$*, údaj* $n = 2000$ *je spoločný pre obe metódy. Zelené krúžky znázorňujú metódu* `DubAb` *a modré + zasa metódu* `Riem`*.*



Použité metódy teda počítajú inverznú Laplaceovu transformáciu veľmi presne a ako sme mohli vidieť na príkladoch, na grafoch prakticky splývajú.

5.3 Ďalšie metódy

V tejto časti si stručne predstavíme ďalšie postupy, ktoré boli požité pre výpočet inverznej Laplaceovej transformácie.

Pri ortogonálnych polynómoch sme už spomenuli Lanczosa a Papoula a niektoré ich výsledky. Ďalším matematikom skúmajúcim využitie polynómov je Piessens. Ten skúmal aj využitie Jacobího polynómov, ktoré sú definované

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\begin{array}{c} n+\alpha \\ k \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} n+\beta \\ n-k \end{array} \right) (x-1)^{n-k}(x+1)^k.$$

Ďalej predpokladal, že môžme vyjadriť

$$F(s) = s^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} c_k P_k^{(\alpha,\beta)} \left(1 - bs^{-1}\right),$$

kde a, b, α a β sú parametre, ktorých voľbe sa Piessens ďalej venuje. Metóda je zdokumentovaná v [3] od strany 337.
Využitím ortogonálnych polynómov sa zaoberal aj Weeks, ktorého metóda je zdokumentovaná v [3] od strany 342. Weeksovu metódu ďalej modifikovali ďalší matematici, za zmienku stoja predovšetkým Lyness a Giunta, ktorých metóda je opísaná v [3] od strany 349.

Pozrime sa ďalej na využitie Fouriera. Ako základ tu poslúžila vyššie opísaná metóda, ktorú sa ďalej snažili vylepšiť rôzni matematici. Napríklad Crump, ktorý využil cosínusovú aj sínusovú Fourierovu transformáciu (viď [3], str. 365), alebo neskôr Durbin ([3], str. 370).
Zaujímavé je využitie rýchlej Fourierovej transformácie (tzn. FFT), ktorému sa venovali Cooley a Wing ([3], str. 379).

Ďalším z postupov je využitie Diracovej delta funkcie $\delta(x) = 0$, ak $x \neq 0$ a $\delta(x) = \infty$ pre $x = 0$. Týmto smerom sa uberal napríklad Cost, ktorý využil vlastnosti Laplaceovej transformácie z Viet 3.12 a 3.2, teda

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n} F(s) = \mathcal{L}\left((-1)^n\, t^n f\,(t)\right),$$

resp.

$$\int_0^\infty t^n e^{-st} \mathrm{d}t = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

V kombinácii s vlastnosťou $\int_0^\infty = f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = f(t_0)$, kde $t_0 > 0$ získame vzťah

$$\frac{s^{n+1}}{n!} t^n e^{-st} \approx \delta(t-t_0).$$

Teda pre $t_0 = n/s$ (maximum ľavej strany je pre $t = n/s$) získame

$$\delta(t-n/s) \approx \frac{s^{n+1}}{n!} t^n e^{-st}.$$

Dosadením do vzťahu z Vety 3.12 dostávame, že

$$(-1)^n \frac{s^{n+1}}{n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n} = \int_0^\infty f(t)\delta(t-n/s)\mathrm{d}t = f(t)|_{t=n/s}.$$

Potom teda

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \left[(-1)^n \frac{s^{n+1}}{n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n} F(s) \right]_{s=n/t}.$$

Tento výraz je známy aj ako Widderova inverzná formula.
Rovnakým smerom sa uberal aj Alfrey, ktorý zvolil aproximáciu

$$f(t) \approx \left[-s^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} F(s) \right]_{s=1/t}.$$

K podobnému výsledku sa dopracoval aj ter Haar (všetky v [3], str. 331-332).

Pozrime sa ešte na metódu odvodenú pomocou Riemannovho súčtu. Chiffelle, Tzou a Özisik ([3], str. 392) sa uberali týmto smerom. Nech všetky singularity funkcie $F(s)$ sú naľavo od $c \in \mathbb{R}$. Nech ďalej $s = c + i\omega$, potom z Definície 4.4 inverznej Laplaceovej transformácie platí

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c+i\infty}^{c-i\infty} F(s)e^{st}\mathrm{d}s = \frac{e^{ct}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(c+i\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

Nahradením ω za $\frac{n\pi}{\tau}$ a $\Delta\omega_n$ za π/τ, môžme integrál na pravej strane rozpísať pomocou Riemannovho súčtu

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(c+i\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega = \frac{e^{ct}}{2\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(a + \frac{in\pi}{\tau}\right) e^{in0\pi t/\tau} =$$

$$= \frac{e^{ct}}{2\pi}\left(F(c) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(F\left(c + \frac{in\pi}{\tau}\right)e^{in\pi/\tau} + F\left(c - \frac{in\pi}{\tau}\right)e^{-in\pi/\tau}\right)\right) =$$

$$= \frac{e^{ct}}{\tau}\left(\frac{1}{2}F(c) + Re\left(\sum_{n=1}^{\infty}F\left(c + \frac{in\pi}{\tau}\right)e^{in\pi/tau}\right)\right).$$

Dostávame tak vzťah

$$f(t) = \frac{e^{ct}}{t}\left(\frac{1}{2}F(c) + Re\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n F\left(c + \frac{in\pi}{t}\right)\right)\right).$$

Presnosť závisí na parametroch c a počte členov sumy. Tzou ukázal, že najlepšia voľba je $c = 4,7/t$, teda pre každé t sa určí rôzne c. Je vidieť, že prípad, kedy $t = 0$ musíme riešiť zvlášť. V tomto prípade preto volíme za t nejakú dostatočne malú hodnotu. Metódu sme použili aj v našich numerických testoch, kde sme použili hodnotu $t = 0,00001$.

Literatúra

[1] Jarník V. (1953): *Integrální počet I.* Nakladatelství československé akademie věd.

[2] Jarník V. (1955): *Integrální počet II.* Nakladatelství československé akademie věd.

[3] Kythe P. K., Schäfferkotter M. R. (2005): *Handbook of Computational Methods for Integration.* Chapman and Hall/CRC.

[4] www.mathworld.wolfram.com

[5] Nováková E., Hyánková M., Průcha L.: *Laplaceova transformace - studijní text pro cvičení v předmětu "Matematika - 2".* Rozvojový projekt MŠMT

[6] Schiff J. L. (1999): *The Laplace transform: Theory and Application.* Springer, New York.

[7] Widder D. V. (1946): *The Laplace Transform.* Princeton University Press, Princeton, NJ.

[8] www.wikipedia.org